

漫谈大学数学教学的目标与方法

李大潜

本届大学数学课程报告论坛的主题是大学数学课程教学方法的改革与创新,重点是数学教学方法,我准备从数学教学的目标谈起,再谈到教学方法方面的问题。这不是故意小题大做,把问题复杂化,而是因为方法与目标总应该是联系在一起的。离开了目标谈方法,不免无的放矢。毛泽东主席就曾说过:“我们不但要提出任务,而且要解决完成任务的方法问题。我们的任务是过河,但是没有桥或没有船就不能过。不解决桥或船的问题,过河就是一句空话。不解决方法问题,任务也只是瞎说一顿。”他强调的是提出任务后,要解决方法问题,但他的话同时也蕴含着一个基本的事实:要研究方法问题,必须针对所要完成的任务、所要实现的目标。从这一点看来,将方法与目标结合起来谈,应该说还是有道理的。然而,这是一个很大的题目,我只能在这儿根据自己有限的经验谈一些粗浅的体会。

一、大学数学教学的目标

数学不仅是一种科学的语言 and 工具,是众多科学与技术必备的基础,而且是一门博大精深的科学,更是一种先进的文化,在人类认识世界和改造世界的过程中一直发挥着重要的作用与影响。

正因为如此,从小学到中学,从中学到大学,从大学到研究生阶段,人们一直都在学习数学。那么,为什么要学习数学,或者说学习数学的目的性究竟何在呢?答案似乎很简单:学习数学,不就是要获得一些数学知识,要学得一大堆重要的数学概念、定理、公式和结论,懂得各种各样的数学方法和手段吗?这种单纯以学习知识为目的的观点,将教育仅仅看成是知识的传授,是很片面的,也是不可取的。

如果将数学教学仅仅看成是知识的传授(特别是那种照本宣科式的传授),那么即使包罗了再多的定理和公式,可能仍免不了沦为一堆僵死的教条,难以发挥作用;而掌握了数学的思想方法和精神实质,就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论,显示出无穷无尽的威力。许多在实际工作中成功地应用了数学并取得相

当突出成绩的数学系毕业生都有这样的体会:在工作中真正需要用到的具体数学分支学科,具体的数学定理、公式和结论,其实并不很多,学校里学过的一大堆数学知识很多都似乎没有派上什么用处,有的甚至已经淡忘,但所受的数学训练,所领会的数学思想和精神,所积累的数学素养,却无时无刻不在发挥着积极的作用,成为取得成功的最重要的因素。因此,如果就事论事,仅仅将数学作为知识来学习,而忽略了数学思想对学生的熏陶以及学生数学素质的提高,忽略了数学作为一种先进的文化所起的特殊而重要的作用,就失去了数学课程最本质的特点和要求,失去了开设数学课程的意义。这就像练武之人,单单学会了一些招式,而不懂得这些招式的意图和来龙去脉,只知剑招,不知剑意,最多只能依样画葫芦,是不可能真正得心应手地加以运用的,更谈不上达到融会贯通的境界了。

以我的看法,学习数学这门学科,无论是对中小学还是对大学,无论是对理工科还是对文科,无论是对青少年还是对成人,无论将来走上怎样的工作岗位,都应该努力达到以下三方面的要求:

1. 通过学习数学,对数学这个学科有一个正确的认识和理解,对数学的重要性,对数学在推进人类社会物质文明与精神文明发展方面的重要作用,对数学是一种先进的文化,包括对数学带来的美感,有一个基本的认同和体会。因而对数学有一种仰慕和敬重,有一种向往和热爱,有一种亲和力。如果觉得数学纸上谈兵、毫无用处,觉得数学高不可攀、难以理解,觉得数学枯燥无味,甚至面目可憎,对其敬而远之、退避三舍,这样的数学教与学,无疑是彻底失败了。

2. 通过学习数学,特别是通过数学严格的训练,能逐步领会到数学的精神实质和思想方法,在潜移默化中积累起一些优良的素质,造就自己的数学教养,不仅变得更加聪明起来,而且对今后一生的发展都会起着重要的积极作用。这一点,特别体现了数学教育本身就是一种素质教育。忽略了这一点,就失去了数学教育的灵魂。

3. 通过学习数学,不仅积累数学的知识和方法,掌握必要的工具和技巧,而且提高将数学有效地用于解决

李大潜,复旦大学教授,中国科学院院士,教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会主任委员。

现实世界中种种实际问题的自觉性和主动性,并具备一定的能力,今后能够与他人合作或想到与他人合作,运用数学思想和工具来解决自己在工作中碰到的一些关键问题。在这方面,要求在一定的程度上熟练掌握关键的数学知识和方法,也要求用数学来解决实际问题的意识和能力,并要求将二者结合起来。

达到了上述三方面的要求,教师才算真正完成了“传道,授业,解惑”的任务,否则就是不称职的;数学的教与学应该说才是真正完满地实现了自己的任务,否则,就是不完全的、有缺憾的、甚至是不成功的。当然对不同的情况,这三方面的要求应有不同的侧重。例如对文科的学生,学习数学的目的应更多放在对数学文化的认同与理解方面,而对数学知识及方法的掌握要求与熟练程度,均不应列为重点。而对理工科的学生,在熟练掌握并灵活运用数学知识与方法方面就应有更高的要求,但对数学文化的理解及数学教养的加强,仍应高度重视。

二、关于大学数学教学方法的看法与建议

如前所述,数学的教学不能仅仅看成是知识的传授,而应该使学生在知识、培养能力和提高素质诸方面都得到教益,兼顾数学文化和数学教养方面的要求。但是,无论是弘扬数学文化,还是增进数学教养,都应该是也只能是学生在数学学习过程中实现的,是必须以认真学习数学知识、严格加强数学训练作为载体来完成的。为了做到这一点,教学方法的改进、改革或创新,就成了一个重要的关键。下面我只想谈几点带原则性的想法,供大家参考。

1. 改进教学方法的最根本的途径和保证,是教师对教学内容的深刻理解和把握

俗话说:“以其昏昏,使人昭昭,是不行的。”如果教师自己对教学内容缺乏深刻的理解,甚至处于一种似懂非懂的状态,无论用什么手段将教学过程包装得花团锦簇,也是无法使学生有所领悟、真正满意的。我们自己都有这样的体会,听某某人讲了个把小时,仍然不得要领,但是另一个人只讲了不多的几句话,就豁然开朗了。像数学这样的学科,它不是一个观赏性的科目,而是一个思考性的科目,只有理解了才能真正懂得,只有理解深透了,才能画龙点睛、一针见血地直奔主题,取得出色的教学效果,舍此别无他途。因此,如果认为只要把规定的教材内容背得滚瓜烂熟,就可以上好一门课,那就大错特错。俗话说:“台上一分钟,台下十年功”。教师讲一分,肚子里储备的货色应该有十分,起码也要有四、五分,才有可能应付裕如、举重若轻地上好一门

课。古人说:“功夫在诗外。”要做成一首好诗,单背熟了诗词格律,熟悉平仄声和押韵,是远远不够的,还必须靠自己的阅历、识见、抱负和胸襟,功夫真正是在诗外的,教学上又何尝不是如此!

讲到这里,我想起小时候读过的一篇古文“马伶传”,即关于一个马姓演员的故事。时隔这么多年,我还能记得其中的基本情节:某地同时请两个戏班演戏,兴化班的戏台在东,华林班的戏台在西,演出的节目都是以大奸臣严嵩为主角的《鸣凤记》。西面演严嵩的为李伶,而东面演严嵩的为马伶。等到他们二人一出场,观众均“西顾而叹,或大呼命酒,或移座更近之,首不复东”。马伶演不过李伶,感到十分羞愧,中途更衣退场,东面的演出因而被迫中止。然而,在失踪近三年后,马伶又回到了该地,请求再一次同演这一个节目。这次情况大不相同,马伶扮演的严嵩出场不久,“李伶忽失声,匍匐前称弟子”,马伶及他所在的戏班因而大出了风头。后来人家问马伶:李伶演严嵩天下无双,你怎么能超过他的呢?马伶回答道:我听说现今的相国昆山顾秉谦,是严嵩一类的人物,我到京城求在他家做门卒三年,天天在朝房伺候他,“察其举止,聆其语言,久乃得之。吾之所为师也”。一个演员为了演好一个角色,不着重关心服装、道具、唱腔及做功等等偏于外在层面的东西,而是深入生活长达三年之久,这对我们教育工作者来说,难道同样具有深刻的启示吗?

2. 好的教学方法必须遵循学生的认识规律

这一点看来平淡无奇,也似乎不难做到,但不幸在教学或教改的过程中却往往被忽视,很多不该发生的问题也往往由此而生。我们都有这样的经验,如果把某一部分内容提到前面来讲,下面就顺畅了,而如果把另一部分内容先讲,整个思路就会混乱,这实际上涉及怎样做才能更好地体现认识规律的问题。就教学而言,教师所面对的对象不是对内容已经熟悉的其他人,而是对有关内容通常一无所知的学生,那就更要顺应并遵循他们的认识规律,不能够把自己主观上的认识和构想强加到他们身上,特别是不应该把教师自己经过多年摸索和实践才有所体会的“高观点”或与主旨关系不大的繁琐细节强加给同学。这种拔苗助长的做法,只能使同学的认识链条人为地脱节,影响他们打好扎实的基础,是不利于他们以后的成长的。

对这一点有深刻认识的,我想应该算赫胥黎(Thomas Henry Huxley)。他在其“进化论与伦理学”一书的序言中,公开地表示他作为一个演说老手,毕生信奉的关于讲演策略的至理名言是认为听众“一无所知”。这样说,并不表示他对听众不尊重,而恰恰表示他尊重

听众的认识规律,尽量从最浅显、最原始的事实开始,逐步将听众引向深入,引入佳境,最后达到很高的境地。赫胥黎能够为普及宣传达尔文的进化论立下大功,树立了不朽的声名,绝不是偶然的。他的这种教学方法,和那种看似高深但一开始就使听众“坐飞机”的做法,实在有天壤之别,应该是我们的一个有益的借鉴。

3. 数学的教学过程应为学生留下充分的思考空间

数学不是一门描述性的学科,而是一门推理性的学科;不是一门观赏性的学科,而是一门思考性的学科。要学好数学,单靠教师讲得天花乱坠、天衣无缝是远远不够的,必须通过学生自身认真的思考和严格的训练。我们都有这样的经验,有些课老师讲得清楚,理解似乎毫无困难,因而对课后的复习及作业很少下工夫,学得就很扎实;有些课因为某种原因临时取消了考试,当时如释重负,当然更不会再进行一次认真的总复习,到现在还是似懂非懂。因此,一位教师,如果只顾自己讲得面面俱到,事无巨细均解释得详尽无遗,而不给学生留下思考的空间和余地,不引导、督促学生严格的训练和认真的思考,不动动学生自身学习的主动性与积极性,就不可能是一个好的称职的教师,尽管也许学生的好评如潮,其教学效果仍应该打一个大大的问号。

我想举一个我自己亲历的例子。我在大学中碰到很多优秀的老师,他们的教学都使我非常受益,我一直很感激他们。但在所学的课程中,我感到使我受益最大的却是“实变函数”这门课。教这门课的是著名数学家陈建功教授,他是这一领域的权威,我们当时都非常庆幸。然而不久我们就发现,实变函数实在是一门很难的功课,而陈先生讲课用的是绍兴官话,讲得又十分精炼简洁,很少做一些铺垫和说明,有时他宣布定理证毕的时候,我们还都觉得似乎才刚刚开始,一点也摸不着头脑。他用作教材的自编讲义,也同样十分精炼简洁,无异于一部“天书”,而且由于是刻写油印的,还有不少印刷错误。我自己在课上听得不明白,甚至有时是不明不白,但却绝没有认为陈先生水平低或教得不认真这些大不敬的想法,总觉得是自己不够聪明或能力不够,课外要花二、三倍的时间进行复习,逐字逐句地破译这一本天书似的讲义,补充一些过程及细节,改正一些印刷错误,一步步地消化理解有关的内容。当时认为太花时间,也颇以为苦,但破译了这一本“天书”,不仅检验和培养了自己的毅力和能力,也使自己增添了信心和勇气,以后再难的“天书”都不在话下了,真正使我终生受益。这虽然只是一个很特殊的例子,但我觉得这却正是学好数学的一种规律性的表现。一位好的教师,不要自己把话讲完,不应该追求事无巨细的面面俱到,而要注意给学生留出

思考的空间和余地,启发学生认真思考,促使学生养成思考的习惯。同时,多讲不如多练,要充分利用习题课的手段,认真进行习题课的改革,为学生创造一个有利于思考的环境。只有这样做,才能培养出不墨守成规、富于开拓精神的创新型人才。教师不仅要在课后促进学生思考,而且在授课的过程中,要使学生随着课程内容的展开,与教师的讲授同步地进行思考,使思维一直处于活跃的状态,而不是消极地、被动地接受教师所灌输的那一点点知识,这样的教学才是生动活泼的、有启发性和生命力的,也才是真正有效果的。

正因为这一点,那种打着多媒体教学的旗号,将教学内容简单地用PPT屏幕显示出来作为数学课堂教学主要手段的做法,完全违反了数学这一学科的本质特点,完全违反了学习数学的基本要求,我们是明确表示反对的;将利用多媒体进行数学教学规定应不少于多少百分比的硬性评估指标,我们更觉得极为荒唐,是破坏数学教学规律的一种瞎指挥,后果将会是很严重的。当然,对多媒体这一种新的教学手段,我们决不简单地采取排斥的态度,在介绍一些历史情况或以描述为主的内容时,为节省时间可以利用PPT屏幕显示;在展示一些空间图像特别是动态的空间图像时,用多媒体更有很大的优越性。在数学教学指导委员会的一个文件上,我们曾经列出了在目前情况下适宜使用多媒体进行数学教学的好几种情况,大家可以仔细看一下。随着多媒体技术的进一步发展,如能在促进学生自由、积极地思考以及师生间良好互动方面发挥积极的作用,更是值得欢迎的。但是,在引入数学概念、解释数学内涵、推导数学公式及证明数学定理时,均宜于放慢节奏有条理地加以展示,使学生能跟上教师讲课的进度、同步地进行思考,决不宜在屏幕上一下子显露出一大片定理或公式,使学生目不暇接,眼花缭乱,无所适从;也不应以提高学生的学习兴趣为名,用一些花花绿绿、五花八门的东西干扰学生的主要注意力,影响学生对数学本质内容的理解和掌握。至于认为一次性地制作好上课用的多媒体软件,就可以多次重复使用,一辈子不用犯愁,则更是一种懒汉的哲学,是对学生极不负责任的态度,是根本要不得的。

4. 数学教学一定要贯彻少而精的原则

在教学过程中要力求做到少而精,这不应视为因为学时不够不能不如此的无奈之举,也不应看作为减轻学生负担所被迫采取的一个措施,而是数学课程教学的一个本质的要求。事实上,一个学科,一门课程,看起来洋洋大观,琳琅满目,但真正核心的东西,真正本质的内容,并不是很多的,说穿了也就是这么一点点,其余的不过是在此基础上的发挥、拓展及应用而已。在教

和学的两个方面，如果不分轻重主次，不分青红皂白，面面俱到地平均使用力量，结果反而不得要领；相反，只有抓住精华，才能学得精通，才能真正实现教学的要求。一个教师，如果觉得自己所教的内容，个个都非常重要，都舍不得割爱，分不清主次，分不出轻重，绝不是一个好的教师，必然很难胜任这门课的教学任务，应该下决心认真努力地提高自己的业务水平和识见。

5. 要尽量结合实际背景和现实原型，不要把数学变成玄学

数学的推理严格遵循形式逻辑的原则，是一门高度抽象的学科，然而，它的概念、思想、理论和方法，并不是“人类精神的纯粹‘自由的创造和想象的产物’，而客观世界绝没有与之相适应的东西”；“情形恰恰相反，自然界对这一切想象的数量都提供了原型”（恩格斯）。如果割断了数学与外部世界的联系，割断了数学与现实生活的关联，单纯从概念到概念，从公式到公式，数学就成了无源之水，无本之木，数学的教学就必然枯燥乏味，失去活力，所传授的知识就不可能是全面深入的，更不可能给学生以数学的思想方法与精神实质的启迪，就不可能真正实现数学教学方面的要求。克莱因说得好：“逻辑关系，或可以说数学机体上的硬骨架，必须保持下去，以便使数学具有它所特有的可信性。但是，数学的生命，数学的最重要的动力，数学在各方面的作用，却完全有赖于应用，即取决于那些纯逻辑内容和其他一切领域间的相互关系。把应用拒之于数学门外，就等于只从骨架中去找活生生动物的活力，而不考虑肌肉、神经与组织，不考虑动物的本能，总之就是不考虑动物的生命本身。”

正是从这一个观点出发，考虑到数学建模是联系数学与应用的必要途径和关键环节，在开展全国大学生数学建模竞赛取得显著成效、在全国很多大学先后开设“数学建模”及“数学实验”类课程也取得很大成功的基础上，现在不少单位和个人正在积极进行的将数学建模的思想与方法融入大学数学类主干课程的教改实践，就是一件值得大力提倡并认真实施的工作。以此为契机，数学的教学改革将可出现一个新的面貌，希望在座的各位认真关心、积极支持、切实投入。

讲到看来高深莫测的数学和外部世界与现实生活之间的联系，我忍不住要多说几句话。“文化大革命”中清华大学的“教改经验”中有“一把锉刀捅破窗户纸”这一段，当时影响很大，可能不少的人现在还记得。应该说，这个例子还是很有启发性的，如果不排斥数学的理论思维，不排斥从这一个朴素而生动的例子出发进行理论上的发挥与深入，应该可以由此说明直与曲、有限与无限之间的辩证关系，在认识上达到升华的。可惜当时

这个例子被不幸地用来反对必要的理论思维，最后引到“以典型产品带动教学”这样一个荒谬的结论。

其实，数学上的不少概念、方法或理论，有些本身就来自其在现实生活中的原型，有些也是可以从现实生活中得到启发或有所比照的。发现并有分寸地指出这种或多或少的联系和类比，对拉近学生与数学之间的距离，增强他们对数学的理解，提高他们学习数学的兴趣，无疑都是有益的。我最近就发现了一个例子。我是一个方向感很差的人，到了一个新地方，往往认不清东西南北。这一个缺点，在上海、在欧美的很多大城市，都不会带来任何困难，在问路时，那里的人们回答“向左”、“向右”或“一直向前”等等，执行起来都没有问题。但到了北京，在问路时人们总是回答“向东”、“向西”、“向南”或“向北”，我既然掌握不了方向，就无所适从了。这时，我首先要问明我现在面向的是哪个方向，再设想我正在南通老家的庭院、站在走廊上向外看，面对的是正南方，左边为东，右边为西，而背后自然是北（这与普通的地图正好倒过来）。两相比较，就知道我应该朝左，还是朝右，还是向前一直走了。这样看，北京人和上海人考虑问题的角度和出发点就是不一样。北京人站在一个客观公正、对所有人都适用的立场上，而上海人却唯我独尊、只从各人自己面向的位置上看问题。这和处理流体力学的两种观点简直是如出一辙。大家知道，取固定在空间、静止不动的坐标系来研究流体力学，是欧拉的观点及方法，流体力学就有在欧拉坐标系中的表示；而取随着流体一起运动的坐标系来研究流体力学，是拉格朗日的观点和方法，流体力学就有在拉格朗日坐标系中的相应表示。这两种坐标是用来处理同一个研究对象的，它们之间自然可以互相转换，这就是欧拉—拉格朗日坐标变换。这样一比较，就可以看出：北京人用的是欧拉坐标，或是欧拉的后裔；上海人用的是拉格朗日坐标，或是拉格朗日的后裔；而我把自己置身于南通老家的庭院然后识别前进方位的方法，就是一种欧拉—拉格朗日坐标变换了。这样一种联想，对理解流体力学中的欧拉坐标与拉格朗日坐标，是不是有些好处呢？

教学是教师义不容辞的责任，是高等学校的第一要务。作为一个教师，特别是参加工作不久的青年教师，一定要以高度的责任心，努力提高自己的教学水平，努力改进自己的教学方法，认真过好教学关，并满腔热情地投入教学改革，认真实践，不断进取，和大家一起创造我国高校数学教育的新辉煌。

[本文是李大潜院士 2008 年 11 月 8 日在第四届大学数学课程报告论坛上的发言]

[责任编辑：文和平]